Cvičení 14. 4. 2021

Téma: Harmonický oscilátor

Anihilační a kreační operátory

Pro harmonický oscilátor můžeme definovat anihilační a kreační operátory, a a $a^\dagger$, které působí na stav $|n\rangle$ následujícím způsobem:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\,.$$

K těmto operátorům jste na přednášce dospěli pomocí bezrozměrných operátorů polohy a hybnosti $\tilde{x} = \sqrt{m\omega}x$ a $\tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}p$. S pomocí $\tilde{x}$ a $\tilde{p}$ píšeme

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\tilde{x} + i\tilde{p}\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\tilde{x} - i\tilde{p}\right)\,.$$

▷ Působením operátoru $a^\dagger$ na stav $|0\rangle$ v x-reprezentaci získejte stav $|1\rangle$.

▷ Působením operátoru $a^\dagger$ na stav $|0\rangle$ v p-reprezentaci získejte stav $|1\rangle$. Ověřte, že získaná funkce je normalizovaná.

▷ *Pro rychlíky:* Vypočtěte stav $|2\rangle$.

V předcházejícím využijeme vyjádření stavu $|0\rangle$ v x- a p-reprezentaci:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \\ f_0(p) &= \tfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\hbar}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 p^2}{2\hbar^2}}\,. \end{aligned}$$

(Řešení na VII-2.)

Práce s a a $a^\dagger$

Kreační a anihilační operátory pro harmonický oscilátor jsou užitečné a hodně se využívají. Typicky v případech, kdy je problém možné převést na oscilátor, případně soustavu oscilátorů. Obdobné operátory se také využívají pro popis mnohoelektronových systémů.

▷ Vyjádřete operátory x a p pomocí operátorů a a $a^\dagger$. (VII-3)

▷ Vypočtěte komutační relaci pro operátory a a $a^\dagger$ s využitím $[x,p] = i\hbar$. (VII-6)

▷ Vypočtěte maticovou reprezentaci operátorů x a x^2. Použijte přitom vyjádření x pomocí a a $a^\dagger$ a komutační relace pro zápis do normálního pořadí (operátor a vpravo, $a^\dagger$ vlevo). Část matice zapište. (VII-3)

▷ *Pro rychlíky:* Vyjádřete operátor a^3 pomocí a a $a^\dagger$ v normálním pořadí.

V poruchové teorii a interakci systému se zářením nás často zajímají tzv. výběrová pravidla. Tedy vztahy mezi matematickým tvarem interakce a povolenými přechody mezi stavy. Povolené přechody jsou takové, pro které jsou maticové elementy interakce nenulové. Pro harmonický oscilátor jsou pravidla jednoduchá. Pokud je interakce tvaru x^n, je přechod povolený jen mezi určitými stavy, jakými? Závisí nějak výsledek na paritě n? (VII-3)

Využití a a $a^\dagger$

Mějme základní stav oscilátoru centrovaného na $x = 0$, budeme ho značit $f_0(x)$. Vedle něho si představme další oscilátor, centrovaný na $x = x_0$. Ten má také vlastní základní stav, budeme ho značit $f_T(x)$. Jednou z věcí, která by nás mohla zajímat, je rozvoj základního stavu posunutého oscilátoru v bázi funkcí oscilátoru centrovaného na $x = 0$. Tedy rozvoj $|0_T\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ ve kterém hledáme koeficienty c_n. Tento výpočet je možné udělat několika způsoby, pokud nenajdeme nějaký elegantní vzorec, tak není možné vypočítat všechny c_n, ale jen jejich část. Například je možné provést integraci x-reprezentací bázových funkcí (stavů $|n\rangle$) s funkcí $f_T(x)$. Je také možné vytvořit maticovou reprezentaci posunutého Hamiltoniánu v bázi stavů $|n\rangle$ a tu pak diagonalizovat. V následujícím si funkci $f_T(x)$ vyjádříme jako $f_T(x) = f_0(x)g(x)$. To nám umožní vypočítat koeficienty c_n podle $c_n = \langle n|0_T\rangle = \langle n|g|0\rangle$. Tento postup nám umožní si ukázat, co je možné s anihilačními a kreačními operátory provádět.

▷ Napište funkci základního stavu posunutého oscilátoru (v x-repre). (VII-4)

▷ Přepište základní stav posunutého oscilátoru $f_T(x)$ do tvaru $f_T(x) = f_0(x)g(x)$. (VII-4)

▷ Rozepište funkci $g(x)$ pomocí Taylorova rozvoje. (VII-4)

Nyní jsme dospěli do stavu, kdy máme původní stav $|0_T\rangle$ vyjádřený pomocí stavu původní báze (krát funkce $g(x)$). Nyní se tedy můžeme pokusit vypočítat některé koeficienty, začneme c_0. Při použití anihilačních a kreačních operátorů je třeba se nejdříve zamyslet, po správné úvaze se většinou výpočet značně zjednoduší.

▷ Některé členy Taylorova rozvoje funkce $g(x)$ budou mít nulové příspěvky k $\langle 0|g|0\rangle$. Které to budou? (VII-4)

▷ Uvažujme příspěvky členů x^2 a x^4, vyjádřených pomocí a a $a^\dagger$. Opět budou přispívat jen některé, které? (VII-6)

▷ Jedním z přispívajících členů x^4 je $a^2{a^\dagger}^2$. Ověřte, že vyjádřený takto a v normálním pořadí (a vpravo) dává stejnou střední hodnotu pro stav $|0\rangle$. (VII-6)

▷ *Pro rychlíky:* Vypočtěte koeficient c_0 pomocí explicitní integrace, tedy $\langle 0|0_T\rangle$. (VII-5)