Domácí úkol 10. 3. 2021

Mějme funkce

$$\begin{aligned} f_0(x) = & \quad \tfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f_1(x) = & \quad \sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}} x e^{-\frac{x^2}{2}} , \end{aligned}$$

kterým budeme také říkat stavy $|0\rangle$ a $|1\rangle$.

Dále mějme operátory x a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ u kterých nás bude zajímat, co se stane po jejich postupné aplikaci na stavy $|0\rangle$ a $|1\rangle$ a zda záleží na pořadí, ve kterém je na stavy pustíme.

▷ Aplikujte operátor $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ na stav $|0\rangle$, tedy na funkci $f_0(x)$. Následně aplikujte operátor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x$ na stav $|0\rangle$ (funkci $f_0(x)$). Výsledek zapište jako $g(x)f_0(x)$, tedy nějaký výraz krát původní funkce/stav. Jsou oba výsledky shodné? Pokud ne, jaký je jejich rozdíl? Tedy čemu se rovná $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right)|0\rangle$?

▷ Postup zopakujte pro stav $|1\rangle$. Porovnejte výsledky rozdílů obdržených pro stavy $|0\rangle$ a $|1\rangle$, měly by být podezřele podobné.

▷ Místo konkrétních funkcí nyní použijte obecnou funkci $f(x)$, její derivaci značte jako obvykle $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ nebo $f'(x)$. Opět vypočtěte rozdíl $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right)f(x)$ a porovnejte s předešlými výsledky.

V předchozím jste vypočetli tzv. komutátory, rozdíl aplikací operátorů v prohozeném pořadí, tedy $\hat{K} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Komutátor se obvykle značí $[\hat{A}, \hat{B}]$, pokud je výsledek nula, operátory tzv. komutují a mají stejné vlastní stavy. Pokud komutátor není nula, operátory nekomutují a mají rozdílné vlastní stavy. To je příklad operátorů x a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, v tomto případě je navíc zajímavá souvislost s Fourierovou transformací. Pro x a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ vychází $[x, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}] = -1$. Tyto komutační relace jsou také velmi užitečné při úpravě složitých výrazů, které se objevují např. při popisu mnohočásticových systémů.

▷ Pro ilustraci uvažujme případ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 f(x)$, který je nepříjemný tím, že derivace je vlevo a působí i na jiné členy než funkci $f(x)$. Použitím derivace výraz upravte. Nyní uvažujme, že $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = -1$ můžeme přepsat jako $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1$. Tedy operátor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x$ je identický operátoru $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1$. Druhý je přitom lepší v tom, že má derivaci více vpravo. Dvojí aplikací relace $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1$ upravte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 f(x)$ na výraz, kde bude derivace působit pouze na funkci $f(x)$. Výsledky obdržené pomocí přímé aplikace derivace a pomocí užití komutátoru by se měly shodovat.