

Domácí úkol 19. 5. 2021

Vlastní stavy operátoru L_x

Uvažujme částici ve stavu s kvantovým číslem orbitálního momentu hybnosti rovným jedné, $l = 1$. Budeme uvažovat kvantování momentu podél osy z . Naším cílem bude odvodit vlastní funkce (jako funkce θ a ϕ) operátoru L_x .

▷ Jaké jsou možné hodnoty průmětu momentu na osu z ? Jaká je velikost momentu hybnosti L^2 ?

Vlastní funkce operátoru L_z mají pro $l = 1$ ve sférických souřadnicích tvar

$$\begin{aligned} Y_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_1^{-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \end{aligned} \quad (1)$$

spodní index je vlastní číslo velikosti momentu hybnosti, horní je vlastní číslo projekce na osu z .

V bázi vlastních stavů L_z (předešlé funkce) je maticová reprezentace operátoru L_x dána maticí

$$\mathbf{L}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

▷ Bez výpočtu: Jaká by měla mít matice \mathbf{L}_x vlastní čísla?

▷ Vypočtete vlastní čísla matice \mathbf{L}_x a vlastní vektor odpovídající nejvyšší vlastní hodnotě.

Vlastní vektor matice \mathbf{L}_x máme nyní vyjádřený v bázi vlastních stavů L_z . Můžeme přejít opět do sférických souřadnic a použít explicitní vyjádření těchto stavů, tedy funkce 1.

▷ Vypočtete vlastní stav L_x (ten jeden, co máme jako vektor) ve sférických souřadnicích. Označme ho třeba ψ_{11}

Operátor L_x ve sférických souřadnicích je

$$L_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \quad (3)$$

▷ Ověřte, že ψ_{11} je vlastní funkcí operátoru L_x a že vlastní číslo taky sedí.

▷ Ověřte, že vlastní stav L_x není ortogonální na vlastní stav Y_1^1 (ve sférických souřadnicích).