

Domácí úkol 21. 4. 2021

V domácím úkolu se podíváme na viriálový teorém pro složitější systém, atom vodíku. Budeme uvažovat elektron obíhající proton, který bude bodový a nehmotný, umístěný v počátku. V tomto případě je Hamiltonián dán (jako obvykle) operátorem kinetické energie T a potenciální energie V . Potenciální energie má tvar

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r},$$

kde e je náboj elektronu a ϵ_0 permitivita vakua. Pro vyjádření kinetické energie je vhodné přejít ke sférickým souřadnicím. Potom je Laplaceův operátor dán vztahem

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\delta_{\theta,\phi}}{r^2}.$$

Pro výpočet budeme uvažovat základní stav atomu vodíku, který má sféricky symetrickou vlnovou funkci danou

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_0}}.$$

Zde je $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ Bohrov poloměr vodíku, a pro jistotu jsem Eulerovo číslo označil e , aby bylo odlišeno od náboje e .

Nejříve vypočtete střední hodnotu kinetické energie následujícím postupem

▷ Zapůsobte Laplaceovým operátorem na ψ . Získané $T\psi$ použijte v $\langle\psi|T|\psi\rangle$. Jelikož je ψ sféricky symetrická, není třeba uvažovat člen $\frac{\delta_{\theta,\phi}}{r^2}$. V integrálu nezapomeňte na Jakobiho faktor.

▷ Člen $r \frac{dV}{dr}$ je roven $-V$. (Trochu si nejsem jistý znaménkem, prosím zamyšlení a kontrolu.) Zde by měla být integrace jednodušší.

▷ V získaných výrazech dosadte za a_0 a porovnáním ověřte platnost viriálového teorému.