Úkol 6. 4. 2022

Téma: Harmonický oscilátor v elektrickém poli

Uvažujme kvantový oscilátor s Hamiltoniánem

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Částice pohybující se v poli kvantového oscilátoru nese náboj a na oscilátor působí elektrické pole o konstantní intenzitě E. Výsledkem je dodatečný potenciál $V = -|e|xE$.

▷ Vypočtěte změnu energetických hladin po přidání potenciálu pomocí převedení celkového potenciálu v Hamiltoniánu na úplný čtverec a transformace souřadnice. Diskutujte roli různých parametrů ve výsledku.

Následující jsou volitelné na výpočet, ale nad možným postupem řešení se zkuste zamyslet.

▷ Odhadněte změnu energie základního stavu pomocí maticové reprezentace diagonalizací části celkového Hamiltoniánu. Pro maticovou reprezentaci použijte bázi vlastních stavů H_0. Tedy napište maticovou reprezentaci H_0 a vypočtěte maticovou reprezentaci V a následně celkovou matici diagonalizujte. Matice není třeba psát celé, stačí do druhého nebo třetího excitovaného stavu včetně. Diagonalizaci stčí na papíře udělat pro 2×2 podmatici, tedy v bázi základního a prvního excitovaného stavu. Pro větší je výhodnější použít numerický výpočet. Je vhodné použít vyjádření H_0 a V pomocí zvyšovacích a snižovacích operátorů.

▷ Odhadněte změnu energie základního stavu pomocí optimalizace parametru x_0 vlnové funkce

$$f_0(x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\alpha^2}} .$$

▷ Vypočtěte odhad změny energie základního stavu pomocí optimalizace (reálného) parametru C vlnové funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}} \left(1 + \sqrt{2}C\frac{x}{\alpha}\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} .$$

Pokud bude třeba, zvyšovací a snižovací operátory vypadají takto

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right) .$$

Operátory a a $a^\dagger$ působí na vlastní stavy tímto způsobem:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle .$$