Cvičení 28. 2. 2023

Funkce, operátory a lineární algebra, 3. díl

Tak jako operátor působí na funkci a výsledkem je funkce, může operátor působit na stav a výsledkem bude obecně kombinace stavů. Minule jsme vypočetli, jak působí operátory $\hat{A} = \frac{\hat{d}}{d\phi}$ a $\hat{B} = e^{i\phi}$ na (obecný stav) $|n\rangle$. V našem případě stačí vypočítat působení operátoru na funkci $f_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}$ a ve výsledku identifikovat bázovou funkci (tedy opět nějaké $f_n(\phi)$) a přepsat je jako ket. Získali jsme $\hat{A}|n\rangle = in|n\rangle$ a $\hat{B}|n\rangle = |n+1\rangle$.

Příklad 1

1.1 Jsou stavy $|n\rangle$ vlastními stavy $\hat{A}$ nebo $\hat{B}$?

1.2 Pomocí znalosti $\hat{A}|n\rangle$ a $\hat{B}|n\rangle$ vypočtěte výsledek působení $\hat{A}\hat{B}$, $\hat{B}\hat{A}$ a $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{B}$ na stav $|n\rangle$.

Příklad 2

2.1 Uvažujme nyní obecný stav $|l\rangle = N(|n\rangle + |m\rangle)$. Jakou hodnotu má normalizační konstanta N?

2.2 Jaké je působení $\hat{A}$ a $\hat{B}$ na stav $|l\rangle$? Je stav $|l\rangle$ stále vlastním stavem jednoho z operátorů?

∞ **Maticová reprezentace**

Pokud máme nějakou ON bázi funkcí, můžeme v ní vyjádřit operátory jako matice, stavy nebo funkce potom budou odpovídat vektorům koeficientů.

Matici **O** libovolného operátoru $\hat{O}$ seskládáme z tzv. maticových prvků $o_{nm} = \langle n|\hat{O}|m\rangle$. Opět si pod bra a ketem můžeme představit funkce báze explicitně, výraz je potom, v případě našich funkcí $f_n(\phi)$, roven $\int_0^{2\pi} f_n(\phi)\hat{O}f_m(\phi)d\phi$.

Příklad 3

3.1 Vypočtěte maticové prvky operátorů $\hat{A} = \frac{\hat{d}}{d\phi}$ a $\hat{B} = e^{\hat{i\phi}}$ v bázi funkcí $f_n(\phi)$. Tedy explicitně pomocí integrálů. V jednom případě jsou $f_n(\phi)$ vlastní stavy, v jednom ne, jaký tvar má matice, pokud $f_n(\phi)$ jsou její vlastní stavy?

3.2 Vypočtěte maticové prvky operátorů $\hat{A} = \frac{\hat{d}}{d\phi}$ a $\hat{B} = e^{\hat{i\phi}}$ ze znalosti působení na stavy $|n\rangle$.

S maticemi můžeme dělat podobné výpočty jako s operátory a funkcemi, například můžeme vypočítat komutátor.

3.3 Vypočtěte **AB**, **BA** a $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Odpovídá výsledek našim předchozím výpočtům? Matice stačí psát v konečné bázi, např. s $|n| \leq 2$.

Příklad 4

Uvažujme nyní funkci $f_{s1}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\phi)$.

4.1 Napište vektor $\mathbf{s_1}$ rozvoje funkce $f_{s1}(\phi)$ do báze funkcí $f_n(\phi)$. Opět stačí uvažovat $|n| \leq 2$.

4.2 Vypočtěte $\mathbf{As_1}$, je $\mathbf{s_1}$ vlastním vektorem **A**? Proč?

4.3 Vypočtěte $\mathbf{A^2 s_1}$, je $\mathbf{s_1}$ vlastním vektorem $\mathbf{A^2}$? Proč?

Pro rychlíky

R.1 Vypočtěte matice **A** a **B** v bázi funkcí $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oplus s_n(\phi)$ ze znalosti působení $\hat{A}$ a $\hat{B}$ na stavy této báze.

R.2 Uvažujme matice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matici **A** diagonalizujte a najděte její vlastní stavy. Proveďte transformaci matice **C** do báze vlastních stavů matice **A**.

∞ **Opakování**

Pro připomenutí si vypočteme ještě jeden příklad na úpravu výrazu pomocí komutátoru. Víme, že $\frac{\hat{d}}{d\phi}\hat{e^{i\phi}} = \hat{e^{i\phi}}(i + \frac{\hat{d}}{d\phi})$.

5.1 Vypočtěte akci operátoru $\frac{\hat{d}}{d\phi}\hat{e^{2i\phi}}$ pomocí testovací funkce a pomocí znalosti komutátoru. Ověřte shodu obou výrazů.