Domácí úkol 28. 3. 2023

Jak jsem naznačil na cvičení, pokud něco označíme jako stav $|n\rangle$, jedná se o něco obecného, bez vyjádření v konkrétní souřadnici. Navíc obecný stav můžeme použít pro systémy s mnoha částicemi, například $|0\rangle$ může označovat základní stav elektronů molekuly nebo pevné látky. To jen pro pořádek a pro budoucnost.

Při mnoha výpočtech ale konkrétní vyjádření znát musíme. (Ale nemusíme, často potřebujeme jen maticové elementy nějakého oprátoru mezi základním stavem a excitovanými a v některých případech je možné je např. odhadnout z experimentu s rozumnou přesností.) Pro jednorozměrné systémy obvykle používáme vyjádření pomocí souřadnice x. Nicméně také můžeme použít vyjádření (tzv. reprezentaci) pomocí hybnosti p, přičemž obě vyjádření jsou spojeny pomocí Fourierovy transformace. Důvodem je, že vlastní stav hybnosti je rovinná vlna $e^{ipx/\hbar}$. Pokud máme stav vyjádřený pomocí hybnosti, tak i operátory musejí působit v prostoru hybnosti. Ukážeme si na příkladu pro základní stav harmonického oscilátoru.

Příklad 1

Použijeme opět stav $|0\rangle$ harmonického oscilátoru, tedy v x funkci

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\,, \tag{1}$$

kde $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

1.1 Vyjádřete $f_0(x)$ jako funkci hybnosti vypočtením integrálu

$$f_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) exp(-ipx/\hbar) dx\,.$$

Výsledkem by měla být funkce $f_0(p) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\hbar}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 p^2}{2\hbar^2}}$

1.2 Ověřte, že funkce $f_0(p)$ je normalizovaná na 1. Integrál provedeme opět přes celý prostor $(-\infty, \infty)$ a použijeme dp.

Příklad 2

Operátory polohy a hybnosti v x-reprezentaci jsou x a $-i\hbar\frac{d}{dx}$. Pokud použijeme p-reprezentaci jsou oparátory $i\hbar\frac{d}{dp}$ a p.

2.1 Vyjádřete Hamiltonián oscilátoru v p-reprezentaci.

2.2 Ověřte, že funkce $f_0(p)$ je vlastní funkcí Hamiltoniánu v p-reprezentaci se správným vlastním číslem.

Příklad 3

V p-reprezentaci můžeme standardně počítat střední hodnoty.

3.1 Jaké jsou střední hodnoty operátorů x a p pro základní stav oscilátoru a proč?

3.2 Vypočtěte střední hodnotu operátoru p^2 pro $f_0(p)$ a střední hodnotu x^2 pro $f_0(x)$. Alespoň jednu z nich ověřte v opačné reprezentaci (tj. například $\langle p^2\rangle$ v x-repre.)

3.3 Vypočtěte střední odchylky $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ a obdobně pro Δp. Vynásobením obou čísel zjistíte, že pro stav $|0\rangle$ platí $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$. To je v souladu s tzv. Heisenbergovými relacemi neurčitosti, které praví, že $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ pro libovolný systém. Základní stav harmonického oscilátoru je zajímavý tím, že pro něj je $\Delta x \Delta p$ minimální možné.

Příklad 4

V p-reprezentaci také můžeme standardně počítat maticové elementy.

4.1 Vypočtěte $f_1(p)$, tedy stav $|1\rangle$ v p-reprezentaci. Je možné použít buď zvyšovací operátor na funkci $f_0(p)$ nebo udělat transformaci funkce $f_1(x)$ nebo vyjít z $f_0(p)$, vynásobit ji p a najít novou normalizační konstantu.

4.2 Vypočtěte maticový element $\langle 1|p|0\rangle$ pomocí zvyšovacích a snižovacích operátorů a také v p-reprezentaci. Ověřte shodu.