Cvičení KT1 29. 11. 2022 (9. cvičení)

Témata:

- Zeemanův jev = *štěpení spektrálních čar vlivem magnetického pole*

Zeemanův jev

Nejprve si ukážeme, jak můžeme získat hamiltonián pro popis Zeemanova jevu (elektronové části). Výchozím bodem je Pauliho hamiltonián, který používáme pro popis nabité částice se spinem ve vnějším magnetickém poli:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2}{2m} + V(r) + \frac{e}{m}\hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} \,. \tag{1}$$

Kvadrát hybnosti rozepíšeme

$$(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 = \hat{p}^2 - e\hat{\vec{p}} \cdot \vec{A} + e^2 A^2 \tag{2}$$

(I) dosadíme a upravíme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) + \frac{e}{2m}(\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \hat{\vec{p}} + \frac{e^2}{8m}(\vec{r} \times \vec{B})^2 + \frac{e}{m}\hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} \,. \tag{3}$$

(II) Což lze dále upravit na

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) + \mu_B(\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}}) \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{8m}(\hat{r}^2 B^2 - (\vec{r} \cdot \vec{B})^2) \,. \tag{4}$$

Atom sodíku ve vnějším magnetickém poli

Na předminulých cvičeních jsme se věnovali spektrální struktuře atomu sodíku. U atomu sodíku zůstane i toto cvičení a podíváme se, jak se jeho jemná a hyperjemná struktura změní po přiložení vnějšího homogenního magnetického pole.

Budeme uvažovat vnější homogenní magnetické pole ve směru osy z. Zeemanův hamiltonián má pak tvar

$$\hat{H}_Z = \mu_B B(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z) - g_I \mu_I B \hat{I}_z \,, \tag{5}$$

kde $\mu_B = q/2m$ a $\mu_I = m\mu_B/M$.

(I) Jak vypadá celkový hamiltoninán popisující náš systém?

(II) Jaká kvantová čísla potřebujeme pro popis systému?

(III) Jaké máme možné báze?

Slabé pole

Nejprve se podíváme na případ, kdy vnější magnetické pole je velmi slabé. Tj. $\hat{H}_0 > \hat{H}_{FS} > \hat{H}_{HFS} \gg \hat{H}_Z$.

(IV) Jak vypadá neporušený hamiltonián? A co je poruchou?

(V) Jakou zvolíme (jako nejvýhodnější) bázi?

Čeká nás tedy spočtení výrazu

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \langle i, j, f, m_f | \, \hat{H}_Z \, | i, j, f, m_f \rangle \\ &= \mu_B B \, \langle i, j, f, m_f | \, (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z) \, | i, j, f, m_f \rangle - g_I \mu_I B \, \langle i, j, f, m_f | \, \hat{I}_z \, | i, j, f, m_f \rangle \,. \end{aligned} \tag{6}$$

K tomu nám pomůže tzv. projekční teorém (*projection theorem*)

$$\left\langle \hat{A}_i \right\rangle = \frac{\left\langle \hat{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{J}} \right\rangle}{j(j+1)} \left\langle \hat{J}_i \right\rangle \,. \tag{7}$$

(VI) Jak tedy spočteme $\left\langle \hat{L}_z \right\rangle$, $\left\langle \hat{S}_z \right\rangle$, $\left\langle \hat{I}_z \right\rangle$?

Pro elektronovou část Zeemanova hamiltoniánu tak dostaneme

$$\varepsilon_1^e = \mu_B B \left(\frac{3}{2} \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right) \left\langle \hat{J}_z \right\rangle = \mu_B B g_J \left\langle \hat{J}_z \right\rangle \,; \tag{8}$$

g_J se nazývá Landého faktor pro jemnou strukturu. Dále pak dostaneme

$$\varepsilon_1 = \mu_B B \left(g_J \alpha - \frac{\mu_n}{\mu_B} g_I \beta \right) m_f = \mu_B B g_F m_f \tag{9}$$

g_F se nazývá Landého faktor pro hyperjemnou strukturu.

(VII) Čemu se rovnají α a β?

(VIII) Dále zanedbáme jadernou část a spočteme g_J a g_F pro naše tři sodíkové stavy $3\ ^2S_{1/2}$, $3\ ^2P_{1/2}$ a $3\ ^2P_{3/2}$.

(IX) Jak bude vypadat spektrum? Měli bychom pozorovat rozštěpení hladin podle m_f.

Silné pole

Nyní se podívejme na případ, kdy vnější homogenní magnetické pole ve směry osy z je silné. V takovém případě máme $\hat{H}_0 > \hat{H}_{FS} > \hat{H}_Z^e \gg \hat{H}_{HFS} > \hat{H}_Z^n$.

(X) Co bude náš neporušený hamiltonián a jakou bázi zvolíme?

(XI) Jako první poruchu započteme elektronový Zeemanův hamiltonián. Měli bychom dostat

$$\varepsilon_1^e = \mu_B B g_J m_j\,. \tag{10}$$

(XII) Jak bude vypadat spektrum?

(XIII) Jako druhou poruchu započteme hyperjemné štěpení a jaderný Zeemanův jev. Mělo by vyjít

$$\varepsilon_1^n = A m_i m_j - \mu_B B g_I m_i \tag{11}$$

Celkově tak dostaneme

$$\varepsilon_1 = \mu_B B \left(g_J m_j - \frac{\mu_n}{\mu_B} g_I m_i \right) + A m_i m_j\,. \tag{12}$$

(XIV) Jak vypadá spektrum?

Středně silné pole

Nakonec se zaměříme na prostřední případ: středně silné vnější homogenní magnetické pole. Máme tedy $\hat{H}_0 > \hat{H}_{FS} > \hat{H}_Z \approx \hat{H}_{HFS}$.

(XV) Co bude náš neporušený hamiltonián a co porucha? Jakou bázi použijeme pro výpočet?

Uvažujme $j = 1/2$.

(XVI) Jaké máme možné (bázové) stavy?

(XVII) Napišme matici 8x8. Spíš než abychom počítali konkrétní hodnoty, zamysleme se, které maticové elementy budou nenulové a co to znamená.

(XVIII) Úvahou bychom dále měli poznat, že máme dva stavy, jejichž energie závisí celou dobu lineárně na B a jejichž vlastní vektory jsou nezávislé na B. Dále bychom měli vidět, že se třikrát mísí vždy dva stavy s $m_f = konst.$.

(XIX) Nakreslete, jak spektrum závisí na intenzitě vnějšího magnetického pole.

Povinná úloha na příště

Jak bude vypadat spektrum při přechodu elektronu z 2p do 1s v atomu vodíku umístěném ve vnějším magnetickém poli $\vec{B} = (0, 0, B)$? Tj. kolik čar a jak od sebe vzdálených uvidíme?
Uvažujte jen magnetické pole a jeho vliv na elektrony

$$\hat{H}_1 = \mu_B (\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}}) \cdot \vec{B}\,; \tag{13}$$

jemnou a hyperjemnou strukturu neuvažujte.
Nápověda:
1) Jaké uvažujeme stavy pro elektron v 1s, resp. 2p, a na co se složí?
2) Výběrová pravidla pro dipólové přechody jsou $\Delta l = \pm 1$, $\Delta s = 0$, $\Delta m_{tot} = 0, \pm 1$.

Bonusová úloha na příště

Tentokrát není.