

Cvičení KT1 4. 10. 2022 (1. cvičení)

Témata:

- opakování ÚDKM: bra-ket notace, skalární součin, operátory, pravděpodobnost,...
- LHO
- Sternovy-Gerlachovy experimenty pro spin 1

Opakování 0: Jednotky

(I) Jaké jednotky používáme v kvantové mechanice?

Opakování I: LHO

Naší první zastávkou je harmonický oscilátor.

(Připomenout si ho lze např. na https://quantum.karlov.mff.cuni.cz/~uhlirovat/UDKM/UDKM2022_cv7.pdf.)

(I) Jak vypadá hamiltonián harmonického oscilátoru? Vyjádřete ho pomocí operátorů souřadnice $\hat{x}$ a hybnosti $\hat{p}$.

(II) Jaký je výraz pro energii LHO?

(III) Minulý semestr jsme zaváděli kreační a anihilační operátory $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$. Jak jsou tyto operátory definované (pomocí $\hat{x}$ a $\hat{p}$), jaký je jejich význam a jaké komutační relace splňují?

(IV) Jak vypadá hamiltonián LHO v řeči operátorů $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$?

(V) Ukažte, že platí následující komutační relace $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, $[\hat{H}, \hat{a}] = -\hat{a}$, $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$.

(VI) Jak působí tyto operátory $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ na vlastní stavy $|n\rangle$ LHO?

Nyní předpokládejme, že se náš systém nachází v superpozici stacionárních stavů lineárního harmonického oscilátoru $|\Psi\rangle = N(|0\rangle + 3|1\rangle + |2\rangle)$.

(VII) Dopačtete normalizační konstantu N tak, aby stav $|\Psi\rangle$ byl normalizován na jedničku.

(VIII) Jaká je pravděpodobnost, že se systém nachází ve stavu $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ a v jiném stavu?

(IX) Jaká je střední hodnota hamiltoniánu LHO ve stavu $|1\rangle$?

(X) Jaká je střední hodnota operátoru stupně excitace $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ve stavu $|1\rangle$?

Opakování II: Hückelova metoda

Uvažujme trojatomovou lineární molekulu, jejíž atomy jsou spojeny dvojnou vazbou, tj. např. $H_2C = C = CH_2$ (diskuzi existence a stability takovéto sloučeniny zde vynecháme). Připomeňte si (popř. nastudujte si) tzv. Hückelovu metodu (např. na https://quantum.karlov.mff.cuni.cz/~uhlirovat/UDKM/UDKM2022_cv1.pdf) a použijte ji pro výpočet energie této molekuly.

(I) Jak vypadá hamiltonián (v maticové reprezentaci) popisující náš systém? Tj. jak vypadá matice, kterou budeme následně diagonalizovat.

(II) Najděte energii základního stavu.

(III) Jaká je pravděpodobnost výskytu π -elektronu na každém z uhlíků (pro základní stav)?

Opakování III: Sternovy-Gerlachovy experimenty

Naší třetí zastávkou jsou Sternovy-Gerlachovy experimenty, tentokrát pro spin 1.

(Připomenout si je můžete také na https://quantum.karlov.mff.cuni.cz/~uhlirovat/UDKM/UDKM2022_cv2.pdf.)

(I) Jaké jsou možné projekce spinu 1?

Jako vhodnou bázi můžeme zvolit projekce podél osy z , tj. vlastní stavy operátoru $\hat{S}_z$; báze funkce označíme $|-z\rangle$, $|0z\rangle$ a $|+z\rangle$.

(II) Zapište operátor $\hat{S}_z$ a stavy $|-z\rangle$, $|0z\rangle$ a $|+z\rangle$ v uvedené bázi.

(III) Jak jsou definovány zvyšovací a snižovací operátory $\hat{S}_+$ a $\hat{S}_-$? A jak vypadají v naší bázi?

(IV) Jak působí $\hat{S}_+$ a $\hat{S}_-$ na jednotlivé stavy $|-z\rangle$, $|0z\rangle$ a $|+z\rangle$?

(V) Vyjádřete operátory $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_y$ v naší bázi.

(VI) Najděte vlastní stavy $\hat{S}_x$.

(VII) Spočtete pravděpodobnosti: $P_{+z,0x}$, $P_{+z,+x}$, $P_{+z,-x}$, $P_{0z,+x}$, $P_{0z,0x}$, $P_{0z,-x}$, $P_{+z,+x,-z}$, $P_{+z,\pm x,-z}$, $P_{+z,(\pm,0)x,-z}$, $P_{+z,(\pm,0)x,+z}$. $P_{A,B}$ značí, že na začátku byl systém ve stavu $|A\rangle$ a měříme stav $|B\rangle$.

(VIII) Uvažujme projekci do libovolného směru $\vec{n}$ (a ne jen podél souřadnicových os). Najděte stav odpovídající projekci 0, $|0n\rangle$.

(IX) Jaká je pravděpodobnost $P_{0z,0n}$?

Povinná úloha na příště

Najděte vlastní stavy $\hat{S}_y$ a spočtěte pravděpodobnosti $P_{+z,0y}$, $P_{+z,+y}$, $P_{+z,-y}$. (1 b.)

Bonusová úloha

Spočtěte pravděpodobnost $P_{+z,-n}$. (1 b.)