Cvičení KT1 20. 12. 2022 (12. cvičení)

Témata:

- EM pole, skalární a vektorový potenciál, Maxwellovy rovnice
- nabitá částice v EM poli - Hamiltonián, klasický popis
- Aharonovův-Bohmův experiment
- Landauovy hladiny - LHO

Aharonovův-Bohmův experiment

V klasické fyzice popisejeme EM pole pomocí elektrické intenzity $\vec{E}$ and magnetické indukce $\vec{B}$. (I) Jak vypadají Maxwellovy rovnice (zapsané pomocí $\vec{E}$ a $\vec{B}$)? Místo těchto dvou veličin můžeme pracovat se skalárním potenciálem φ a vektorovým potenciálem $\vec{A}$ definovanými vztahy

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}\,, \tag{1}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,. \tag{2}$$

Zatímco v klasické teorii nám použití těchto potenciálů může řešení problém usnadnit, v kvantové teorii je jejich použití nezbytné (uvidíte na konci semestru nebo ten další). Nabízí se tedy otázka, které potenciály jsou "fyzikálnější".
(II) Jak vypadají Maxwellovy rovnice zapsané pomocí φ a $\vec{A}$?

Snadno se lze přesvědčit, že φ a $\vec{A}$ nejsou určeny jednoznačně; máme volnost v transformaci

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi\,, \tag{3}$$

$$\varphi \to \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\,. \tag{4}$$

Tuto volnost ošetřujeme pomocí vhodné tzv. kalibrační podmínky.

(III) Než přejdeme k Aharonovově-Bohmově experimentu, věnujeme ještě chvilku klasické mechanice a elektromagnetismu. Hamiltonián nabité částice v EM poli je

$$\hat{H}(\vec{x},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x},t)\right)^2 + q\varphi\,. \tag{5}$$

Ukažte, že s tímto hamiltoniánem jsou klasické Hamiltonovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\,, \tag{7}$$

ekvivalentní s Newtonovou pohybovou rovnicí s Lorentzovou silou

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = F_i^L = q\left(E_i + \varepsilon_{ijk}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}B_k\right)\,. \tag{8}$$

Aharonovův-Bohmův experiment ukazuje, že fáze nabité částice může být ovlivněna přímo potenciály φ a $\vec{A}$, i když v dané oblasti jsou "klasické" veličiny $\vec{B}$ a $\vec{E}$ nulové. Jeho základní myšlenkou je, že potenciály φ a $\vec{A}$ vystupují ve vzorcích pro fázový posun vlnové funkce a ten může ovlivnit interferenční obrazec při pokusech typu dvouštěrbinový experiment.

(IV) Jak byste vytvořili $\vec{A}$ bez $\vec{B}$?

Klasickým příkladem takové situace je nekonečně dlouhá, válcová cívka, tzv. solenoid. Magnetická indukce $\vec{B}$ prochází jeho vnitřkem a ven vystupuje z nekonečně vzdálených konců. Vně takového solenoidu by bylo $\vec{B} = 0$. Reálný solenoid takto striktní není, ale pokud je dostatečně štíhlý, může být vnější pole velmi slabé. Vektorový potenciál $\vec{A}$ okolo solenoidu tvoří kruhové siločáry a jeho intenzita od povrchu se vzdáleností postupně klesá. V tomto příkladu si spočteme tento potenciál $\vec{A}$ a ukážeme si, jak může fázi ovlivnit fázi vlnové funkce.

Experimentální uspořádání je následující, viz schéma. Koherentní svazek elektronů vyráží ze zdroje v bodě x_0, je rozdělen na dva svazky γ_1 a γ_2 a tyto svazky se opět spojují a interferují na detektoru (bod x^*). (Jedná se o analogii k Youngově optickému dvojštěrbinovému experimentu.) Vyšrafované kolečko značí nekonečně dlouhý solenoid, uvnitř kterého je magnetické pole $\vec{B}$ (kolmé k nákresu). Toto magnetické pole je nulové všude mimo solenoid.

Označme magnetický tok

$$\phi = \int_{\text{sol}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \,. \tag{9}$$

(V) Nejprve si ukážeme, že

$$\int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \phi \,. \tag{10}$$

Nápověda: vzpomeňte si na Stokesovu větu

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \,. \tag{11}$$

Jelikož magnetický tok je nenulový, musí nutně být pole $\vec{A}$ nenulové, ačkoli $\vec{B} = 0$.

(VI) Ukažte, že potenciál $\vec{A}$ může mít tvar

$$\vec{A} = \frac{\phi}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \,, \quad \vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{r} \\ \frac{x}{r} \end{pmatrix} . \tag{12}$$

Zde jsme použili polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi \,, \tag{13}$$

$$y = r\sin\varphi \,, \tag{14}$$

$$z = z \,, \tag{15}$$

s počátkem ve středu solenoidu.

Matematická analýza nám říká, že vektorové pole $\vec{F}$ s nulovou rotací je potenciální, tj. že existuje skalární funkce f taková, že $\vec{F} = \nabla f$ a integrál $\int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = f(a) - f(b)$ nezávisí na integrační cestě. Uvažujme tedy funkci $\chi(x)$, která bude vyjadřovat posun fáze vlnové funkce a pro jednoduchost zvolne $\chi(x_0) = 0$. Vlnovou funkci popisující elektronový svazek šířící se po cestě γ_1 tedy uvažujme ve tvaru

$$\psi_1(x) = \exp\left(i\frac{e\chi(x)}{\hbar} \right) \psi_0(x) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{x_0}^{x} \vec{A}(x') \cdot \mathrm{d}\vec{l} \right) \psi_0(x) \,. \tag{16}$$

(VII) Dosazením do Schrödingerovy rovnice

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{x},t) \right)^2 + V \right] \psi_1 = E\psi_1 \tag{17}$$

dostaneme známou stacionární Schrödingerovu rovnici

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V \right) \psi_0 = E\psi_0 \,. \tag{18}$$

A nyní se konečně dostaneme k výpočtu interference dvou elektronových svazků na detektoru. Podobně jako pro první svazek ψ_1 budeme uvažovat vlnovou funkci ψ_2 popisující druhý svazek šířící se podél cesty γ_2 ve tvaru napsaném výše. Budeme dále předpokládat, že

$$\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0) = \psi_0(x_0) \,, \tag{19}$$

tj. na počátku jsou elektrony ve zcela totožném tvaru. Amplituda v bodě x^* na detektoru je dána součtem dílčích amplitud

$$\mathcal{A} = \psi_1(x^*) + \psi_2(x^*) \tag{20}$$

a hustota pravděpodobnosti výskytu je pak dána

$$I = |\psi_1(x^*) + \psi_2(x^*)|^2 \,. \tag{21}$$

(VIII) Dosazením za ψ_1 a ψ_2 tak dostaneme

$$I = |\psi_1(x^*) + \psi_2(x^*)|^2 = 2\left(1 + \cos\left(\frac{e}{\hbar}\phi \right) \right) |\psi_0(x^*)|^2 \,. \tag{22}$$

Vidíme tedy, že intenzita (pravděpodobnost) se periodicky mění s magnetickým tokem ϕ.

(IX) Jakou nejmenší změnu ϕ dokážeme rozlišit?

Landauovy hladiny

Uvažujme nabitou částici pohybující se v rovině (x, y) v silném homogenním magnetickém poli, které je kolmé k této rovině

$$\vec{B} = B\vec{e}_z\,. \tag{23}$$

Odpovídající vektorový potenciál může mít tvar ((X) ukažte)

$$\vec{A} = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0\right)\,. \tag{24}$$

Dynamiku částice popisuje hamiltonián

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t)\right)^2\,, \tag{25}$$

který, (XI) dosazením a úpravou, můžeme vyjádřit jako

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2}\hat{y}\right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2}\hat{x}\right)^2\right]\,. \tag{26}$$

Nabízí se tedy přejít k veličinám

$$\hat{p} = \frac{1}{ebX}\left(\hat{p}_x - \frac{eB}{2}\hat{y}\right)\,, \tag{27}$$

$$\hat{q} = -\frac{1}{ebX}\left(\hat{p}_y + \frac{eB}{2}\hat{x}\right)\,, \tag{28}$$

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{\hbar eB}}\left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2}\hat{y}\right)\,, \tag{29}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\hbar eB}}\left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2}\hat{x}\right)\,. \tag{30}$$

(XII) Spočítejte komutátory $\left[\hat{Q}, \hat{P}\right]$ a $[\hat{q}, \hat{p}]$ a ověřte tak, že se jedná o kanonické proměnné. Hamiltonián uvedenou substitucí získá nám dobře známý tvar LHO

$$\hat{H} = \frac{\hbar eB}{2m}\left(\hat{Q}^2 + \hat{P}^2\right) = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\hat{Q}^2 + \hat{P}^2\right)\,, \tag{31}$$

kde jsme zavedli cyklotronovou frekvenci $\omega = eB/m$. Pro energii tak získáme

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\,. \tag{32}$$

Tyto hladiny nazýváme Landauovými. Jaká je jejich degenerace?

Povinná úloha na příště

Už není.

Bonusová úloha

Tentokrát není.