Zápočtová písemka ÚDKM 1. 6. 2021 - řádný termín

Instrukce

Na vypracování této zápočtové písemky máte 150 minut **v úterý 1. 6. 2021 v čase 8:00 – 10:30**. Do uplynutí tohoto časového limitu je potřeba odeslat své řešení (foto, sken,...) na email terezauhlirova@seznam.cz nebo prostřednictvím MS Teams (jako soukromou zprávu mně). Nedílnou součástí řešení je i postup.

V písemce jsou tři příklady s podúlohami značenými římskými číslicemi. Každá podúloha je ohodnocena 1 bodem, není-li explicitně uvedeno jinak. Celkem je tedy možné získat až 25 bodů. Pro získání zápočtu je nutné napsat tento test na **alespoň 60 %**, tj. získat alespoň 15 bodů. Část bodů potřebných pro zápočet lze nahradit body za bonusové úlohy získané v průběhu semestru.

Při řešení testu platí následující pravidla:

- Zápočtovou písemku řešte zcela samostatně.
- Při řešení zápočtové písemky je potřeba mít zapnutý mikrofon a webkameru tak, aby bylo vidět, že test řešíte samostatně.
- Můžete používat materiály a poznámky ze cvičení (v tištěné i digitální podobě).
- Používání internetu je výslovně zakázáno.
- Kalkulačku můžete mít a používat.

Hodně štěstí!

Příklad 1.: Rungeho-Lenzův vektor

V coulombickém poli ($V(r) = -Z/r$) existuje ještě jeden integrál pohybu – tzv. Rungeho-Lenzův vektor (jak jste nejspíš viděli také na přednáškách z teoretické fyziky):

$$\vec{X} = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}} - \hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}\right) + \hat{\vec{n}}\,. \tag{1}$$

V kvantové mechanice Rungeho-Lenzův vektor používáme v antisymetrickém tvaru, abychom pracovali v hermitovským operátorem.

(I) Co znamená hermitovský operátor?

(II) Uvažujme dva hermitovské operátory $\hat{A} = \hat{A}^+$ a $\hat{B} = \hat{B}^+$, kde + značí hermitovské sdružení. Čemu se rovná $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^+$ a tedy $\left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right)^+$?

Pro integrál pohybu platí, že komutuje s hamiltoniánem. Zde postupně ukážeme, že opravdu

$$\left[\hat{X}_i, \hat{H}\right] = 0\,. \tag{2}$$

$\hat{H}$ je vodíkový hamiltonián

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} - \frac{1}{\hat{r}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial \hat{r}} - \frac{\hat{L}^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{1}{\hat{r}}\,. \tag{3}$$

(III) Spočtěte komutátor

$$\left[\hat{p}_i, \hat{H}\right]\,. \tag{4}$$

(IV) Spočtěte komutátor

$$\left[\hat{L}_i, \hat{H}\right]\,. \tag{5}$$

(V) Spočtěte komutátor

$$\left[\hat{n}_i, \hat{H}\right]\,. \tag{6}$$

(VI) Použitím výsledků z bodů (III) a (IV) ukažte, že

$$\left[\hat{p}_j \hat{L}_k, \hat{H}\right] = -i\frac{1}{\hat{r}^2}\hat{n}_j \hat{L}_k \tag{7}$$

.

(VII, 2 b.) Se znalostí (nejen) výsledků z bodů (III) – (VI) vyvoďte, že opravdu platí (2).

Příklad 2.: Lineární harmonický oscilátor

V této úloze se budeme věnovat nám dobře známému harmonickému oscilátoru.

(VIII) Jak vypadá hamiltonián harmonického oscilátoru? Vyjádřete ho pomocí operátorů souřadnice $\hat{x}$ a hybnosti $\hat{p}$ a také pomocí anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$. Jak působí tyto operátory na vlastní stavy $|n\rangle$ LHO? Jaký je výraz pro energii LHO?

LHO mírně narušíme přidáním poruchy ve tvaru $\delta\hat{V} = \delta\hat{x}^3$ (δ je reálný parametr určující míru poruchy).
(IX) Vyjádřete poruchu $\hat{x}^3$ pomocí anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$.
(X) Jak obecně působí porucha $\hat{x}^3$ na vlastní stav LHO $|n\rangle$?
(XI) Jak se změní, v prvním řádu poruchové metody, energie základního a prvního excitovaného stavu?
(XII, 2 b.) Pro základní stav spočítejte opravu druhého řádu poruchové metody.

Nyní předpokládejme, že se náš systém nachází v superpozici stacionárních stavů lineárního harmonického oscilátoru

$$|\Psi\rangle = N\left(|0\rangle + 2\,|1\rangle - |2\rangle\right) \tag{8}$$

(XIII) Dopočtěte normalizační konstantu N tak, aby stav $|\Psi\rangle$ byl normalizován na jedničku.
(XIV) Jaká je pravděpodobnost, že se systém nachází ve stavu $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ a v jiném stavu?
(XV) Jaká je střední hodnota hamiltoniánu LHO ve stavu (8)?

Příklad 3.: Částice v potenciálové trojjámě

Označme $|i\rangle$, ($i = 1, 2, 3$), stav částice, která se nachází v jámě i a má energii $E_0 = 0$. Dále předpokládejme, že tři uvedené stavy jsou ortonormální, tj. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. Částice se může protunelovat z jedné jámy do druhé, což popíšeme hamiltonánem (τ je reálná konstanta)

$$\hat{H} = \tau \left(|1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 3| + |3\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 3| + |3\rangle \langle 2| \right) . \tag{9}$$

Dále zavedeme permutační operátor definovaný

$$\hat{P} |1\rangle = |2\rangle \ , \tag{10}$$

$$\hat{P} |2\rangle = |3\rangle \ , \tag{11}$$

$$\hat{P} |3\rangle = |1\rangle \ . \tag{12}$$

(XVI) Napište operátory $\hat{H}$ a $\hat{P}$ v maticové reprezentaci v bázi stavů $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$.

(XVII) Ukažte, že $\hat{H}$ a $\hat{P}$ spolu komutují.

(XVIII, 2 b.) Ukažte, že vlastní vektory operátoru $\hat{P}$ lze napsat ve tvaru

$$|l_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ l_i^2 \\ l_i \end{pmatrix} , \tag{13}$$

kde l_i jsou tři třetí odmocniny jedničky, $l_i = \sqrt[3]{1}$.

(XIX) Ukažte, že spektrum $\hat{H}$ sestává z dvou hladin $E_1 = -\tau$ a $E_2 = 2\tau$. Uveďte také degeneraci každé z hladin. Nápověda: $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$.

(XX, 2 b.) Určete, jaké l_i odpovídá každé z hladin $E_1 = -\tau$ a $E_2 = 2\tau$. Nápověda: $1 + l_i + l_i^2 = 0$ pro $l_i \neq 1$.

(XXI) Uvažujme dále, že se částice nachází ve stavu $|1\rangle$. Vyjádřete tento stav v bázi stavů $|l_0\rangle$, $|l_1\rangle$, $|l_2\rangle$.