

Zápočtová písemka ÚDKM 19. 5. 2022 – řádný termín

Instrukce

Na vypracování této zápočtové písemky máte 90 minut **ve čtvrtek 19. 5. 2022 v čase cvičení, 14:00 – 15:30**. Do uplynutí tohoto časového limitu je potřeba odevzdat své řešení. Nedílnou součástí řešení je i postup.

V písemce jsou tři příklady s podúlohami značenými římskými číslicemi. Každá podúloha je ohodnocena 1 bodem, není-li explicitně uvedeno jinak. Celkem je tedy možné získat až 25 bodů. Pro získání zápočtu je nutné napsat tento test na **alespoň 60 %**, tj. získat alespoň **15 bodů**. Část bodů potřebných pro zápočet lze nahradit body za bonusové úlohy získané v průběhu semestru.

Při řešení testu platí následující pravidla:

- Zápočtovou písemku řešte zcela samostatně.
- Můžete používat materiály a poznámky ze cvičení - pouze v tištěné podobě (!).
- Používání internetu je výslovně zakázáno.
- Kalkulačku můžete mít a používat, ale nejspíš moc nápomocná nebude.

Zadání obsahuje 4 strany (instrukce a 3 příklady), nezapomeňte otáčet listy papíru!

Hodně štěstí!

Příklad 1.: Moment hybnosti (7 b.)

Orbitální moment hybnosti $\hat{\vec{L}}$ je definován

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k, \quad (1)$$

kde ϵ_{ijk} je Levi-Civitův symbol a $\hat{x}_j$ a $\hat{p}_k$ jsou operátory polohy a hybnosti splňující komutační relace

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \quad (2)$$

(I) Spočítejte komutátory z -ové složky momentu hybnosti a operátoru souřadnice:

$$[\hat{L}_z, \hat{x}], \quad [\hat{L}_z, \hat{y}], \quad [\hat{L}_z, \hat{z}]. \quad (3)$$

(II) Spočítejte komutátory z -ové složky momentu hybnosti a hybnosti:

$$[\hat{L}_z, \hat{p}_x], \quad [\hat{L}_z, \hat{p}_y], \quad [\hat{L}_z, \hat{p}_z]. \quad (4)$$

(III) Např. použitím výsledků z (I) spočtete komutátor

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x]. \quad (5)$$

(IV, 2 b.) Dále spočítejte komutátory

$$[\hat{L}_z, \hat{r}^2], \quad (6)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{p}^2], \quad (7)$$

kde $\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$ a $\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$.

(V, 2 b.) Ukažte, že Hamiltonián

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) \quad (8)$$

(potenciál $V(r)$ závisí pouze na r) komutuje se všemi třemi složkami $\hat{L}_i$.

Příklad 2.: Vodíkové funkce (7 b.)

Předpokládejme, že atom vodíku se nachází v superpozici stacionárních stavů

$$\langle \vec{r} | \psi_{nlm} \rangle = \psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (9)$$

(jako dříve $R_{nl}(r)$ jsou radiální vodíkové funkce a $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ jsou kulové funkce.)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} (2|\psi_{100}\rangle - 3|\psi_{200}\rangle + |\psi_{322}\rangle) . \quad (10)$$

(VI) Jaká je parita kulových funkcí $Y_{lm}(\theta, \varphi)$? (Tj. co se stane při záměně $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.)

(VII) Je vlnová funkce (10) vlastním stavem operátoru parity?

(VIII) Je vlnová funkce (10) normalizovaná?

(IX) Jaká je pravděpodobnost, že nalezneme systém ve stavu $|\psi_{100}\rangle$, ve stavu $|\psi_{200}\rangle$, ve stavu $|\psi_{322}\rangle$ a v jiném stavu?

(X) Jaká je střední hodnota energie (vodíkového hamiltoniánu $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} - \frac{1}{\hat{r}}$) ve stavu (10)?

(XI, 2 b.) A jaká je střední hodnota operátorů $\hat{L}^2$ a $\hat{L}_z$ ve stavu (10)?

Příklad 3.: 3D harmonický oscilátor v magnetickém poli (11 b.)

Uvažujme částici hmotnosti m a náboje q pohybující se v potenciálu trojrozměrného harmonického oscilátoru. Hamiltonián popisující náš systém má tedy tvar

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \frac{1}{2} (\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) + \frac{1}{2} (\hat{p}_y^2 + \hat{y}^2) + \frac{1}{2} (\hat{p}_z^2 + \hat{z}^2) , \quad (11)$$

kde $\hat{p}_i$, $\hat{x}_i$ jsou operátory hybnosti a souřadnice splňující komutační relace

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i , \quad i = x, y, z . \quad (12)$$

Vzpomeňme si na cvičení, kde jsme zavedli anihilační $\hat{a}$ a kreační $\hat{a}^\dagger$ operátory.

(XII) Jak jsou tyto anihilační $\hat{a}_i$ a kreační $\hat{a}_i^\dagger$ operátory definované v řeci operátorů $\hat{p}_i$ a $\hat{x}_i$?

(XIII) Jaké komutační relace splňují?

(XIV) Jak vypadá hamiltonián $\hat{H}$ vyjádřený pomocí $\hat{a}_i^\dagger$, $\hat{a}_i$?

Přidání vnějšího magnetického pole lze popsat jako poruchu

$$\hat{H}_p = -\frac{q}{2m} B \hat{L}_x . \quad (13)$$

(XV) Jak je definován moment hybnosti $\hat{\vec{L}}$?

(XVI) Vyjádřete $\hat{L}_x$ pomocí anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}_i^\dagger$, $\hat{a}_i$. Mělo by vyjít $\hat{L}_x = i (\hat{a}_z^\dagger \hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_z)$.

Použitím poruchové metody spočtete rozštěpení prvního excitovaného stavu.

(XVII, 2 b.) Jaká je energie neporušeného systému a jaké stavy jí náleží?

(XVIII) Použijeme poruchovou metodu pro degenerované nebo nede degenerované hladiny?

(XIX, 3 b.) Proveďte výpočet. Mělo by vyjít $E_1^{(1)} = 0, \pm qB/2m$.