Cvičení ÚDKM 24. 2. 2022 (2. cvičení)

Témata:

- Sternovy-Gerlachovy experimenty: vyjádření operátoru spinu, výpočet pravděpodobností
- komutátory I: složky a druhá mocnina operátoru spinu

Sternovy-Gerlachovy experimenty

Na přednášce nejspíš uslyšíto o Sternových-Gerlachových experimentech (prozatím se o nich můžete dočíst např. v knize doc. Zamastila), které nám ukazují, že moment hybnosti je kvantován. Při SG experimentech pošleme svazek částic (např. elektronů) do silného nehomogenního magnetického pole (např. ve směru osy z) a pozorujeme, že se svazek rozdělil na několik jasně daných svazků. Tedy projekce momentů hybnosti v daném směru mohou nabývat jen určitých diskrétních hodnot.

Pro jednoduchost uvažujme nejprve elektrony. Elektron je částice se spinem (momentem hybnosti) $s = 1/2$. Existují dvě možné projekce spinu $1/2$ do libovolného směru, $-1/2$ a $+1/2$. Konvenčně volíme směr podél osy z, ale nic nám nebrání zvolit jinou osu. Ve SG experimentu se tedy svazek elektronů procházející nehomogenním magnetickým polem (ve směru osy z) rozdělí na dva svazky: jeden s projekcí spinu podél osy z $s_z = +1/2$ a jeden s projekcí spinu podél osy z $s_z = -1/2$. Ty to dva stavy můžeme označit

$$|+z\rangle \equiv |s = 1/2, s_z = +1/2\rangle \tag{1}$$
$$|-z\rangle \equiv |s = 1/2, s_z = -1/2\rangle \,. \tag{2}$$

Tyto dva stavy, dané projekcí spinu ve směru osy z, tvoří bázi $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$, kterou použijeme v následujících výpočtech. Tyto dva stavy jsou na sebe navzájem kolmé $\langle \pm z|\mp z\rangle = 0$ a každý z nich je normovaný na jedničku $\langle \pm z|\pm z\rangle = 1$. Zjednodušeně zapsáno $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, kde $i, j = +z, -z$.

Stavy (1) a (2) v této bázi zapíšeme

$$|+z\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |-z\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Všimněme si, že báze $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$ je úplná (tj. pro rozklad jedničky platí):

$$|+z\rangle\langle +z| + |-z\rangle\langle -z| = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 1\,. \tag{4}$$

(I) Také snadno ověříme, že bázové stavy jsou na sebe kolmé.

Obecný stav $|\psi\rangle$ zapíšeme v této bázi

$$|\psi\rangle = c_+|+z\rangle + c_-|-z\rangle = c_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_+\\c_-\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Uvažujme nyní spinový operátor $\hat{\vec{S}}$

$$\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) = \hat{S}_x n_x + \hat{S}_y n_y + \hat{S}_z n_z\,. \tag{6}$$

$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ je jednotkový směrový vektor. Tento operátor (tedy jeho i-tá složka, $i = x, y, z$) působí na stav $|\psi\rangle$, čímž tento stav převede na stav $|\phi\rangle$. Abstraktně toto působení zapíšeme

$$\hat{S}_i|\psi\rangle = |\phi\rangle \tag{7}$$

Oba tyto stavy $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ můžeme vyjádřit v naší bázi, viz rce (5). Pro operátor $\hat{S}_i$ tak dostaneme maticové vyjádření

$$\hat{S}_i = \begin{pmatrix}\langle +z|S_i|+z\rangle & \langle +z|S_i|-z\rangle\\ \langle -z|S_i|+z\rangle & \langle -z|S_i|-z\rangle\end{pmatrix}. \tag{8}$$

(II) Jak by obecně vypadalo vyjádření operátoru $\hat{S}_i$ v bázi stavů $\{|+x\rangle, |-x\rangle\}$? Tyto stavy jsou dány projekcí spinu podél osy x.

Působením spinového operátoru $\hat{S}_z$ na stavy $|+z\rangle \equiv |s_z = +1/2\rangle$ a $|-z\rangle \equiv |s_z = -1/2\rangle$ chceme získat odpovídající projekce spinu (tak je spinový operátor definován). Tedy

$$\hat{S}_z|+z\rangle = +1/2\,|+z\rangle \tag{9}$$
$$\hat{S}_z|-z\rangle = -1/2\,|-z\rangle\,. \tag{10}$$

Operátor $\hat{S}_z$ má tedy podobu

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

(III) Ověřte, že opravdu platí (9) a (10).

Jak vypadají operátory $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_y$ v bázi $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$?
(Pozor, $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_y$ chceme vyjádřit v bázi $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$, nikoliv v bázi $\{|+x\rangle, |-x\rangle\}$, resp. $\{|+y\rangle, |-y\rangle\}$?, kde by odpovídající operátory byly diagonální.) V kvantové mechanice často pracujeme s tzv. **snižovacími a zvyšovacími operátory** $\hat{S}_\pm$ (anglicky *ladder operators*), místo přímo operátorů $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_y$. Zvyšovací operátor je definován (zcela obecně pro libovolný moment hybnosti, ne jen pro $s = 1/2$; toto je dobré si pamatovat, ještě se s tím jistě několikrát setkáme)

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y \tag{12}$$

a snižovací operátor je dán

$$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y \,. \tag{13}$$

Pro jejich působení na obecný stav $|l, m\rangle$ platí

$$\hat{S}_\pm |l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, |l, m \pm 1\rangle \,. \tag{14}$$

l zde značí moment hybnosti a m zde značí jeho projekci, přičemž $m = -l, -l+1, ..., +l-1, +l$. Např. pro moment hybnosti $l = 1$ máme tři projekce $m = -1, 0, +1$. Pro náš případ elektronů se spinem 1/2 dostaneme ((IV) ověřte)

$$\hat{S}_\pm |\mp z\rangle = |\pm z\rangle \,, \tag{15}$$

$$\hat{S}_\pm |\pm z\rangle = 0 \,. \tag{16}$$

Tedy nižší stav zvýšíme či vyšší stav snížíme o jedna (první rovnice) a maximální (krajní) stavy už nelze posunout dál (druhá rovnice), čili dostaneme nulu. V bázi $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$ tedy tyto dva operátor $\hat{S}_\pm$ mají tvar

$$\hat{S}_+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \hat{S}_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{17}$$

Z rovnic (12) a (13) tedy dostaneme vyjádření operátoru $\hat{S}_x$:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Vyřením vlastního problému $\hat{S}_x |\pm x\rangle = \lambda |\pm x\rangle$ pak dostaneme stavy $|\pm x\rangle$ vyjádřené v bázi $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$. Tedy: Obecně stav $|\pm x\rangle$ vyjádříme v bázi jako

$$|x\rangle = a\, |+z\rangle + b\, |-z\rangle \,. \tag{19}$$

Vlastní problém pak vypadá

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \tag{20}$$

(V) Vyřešením dostaneme dvě možná vlastní čísla: $\lambda = \pm 1/2$. Prvnímu $\lambda = +1/2$ odpovídá vlastní vektor (požadujeme, aby byl normalizovaný na jedničku)

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

a druhému $\lambda = -1/2$ odpovídá vlastní vektor

$$|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{22}$$

(VI) A zcela podobně získáme vyjádření operátoru $\hat{S}_y$ a jeho vlastní stavy v bázi $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$.

A na závěr si spočteme pár pravděpodobností ve Sternových-Gerlachových experimentech. Uvažujme, že máme svazek elektronů ve stavu $|+z\rangle$. S jakou pravděpodobností budeme detekovat stav $|+x\rangle$? Tj. tento svazek projde magnetickým polem ve směru osy x, rozdělí se na dva, $|+x\rangle$ a $|-x\rangle$, a my detekujeme $|+x\rangle$.

Amplituda pravděpodobnost je dána jako skalární součin bra="co chceme detekovat" (zde $\langle +x|$) a ket="stav systému" (zde $|+z\rangle$)

$$A = \langle +x|+z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \,. \tag{23}$$

Pravděpodobnost je pak daná druhou mocninou absolutní hodnoty amplitudy pravděpodobnosti, tj.

$$P_{+z,+x} = \frac{1}{2} \,. \tag{24}$$

(VII) Podobně získáme

$$P_{+z,-x} = \frac{1}{2} \,. \tag{25}$$

Vidíme tedy, že pravděpodobnost se opravdu zachovává - můžeme naměřit dvě možnosti, nic víc; čili $P_{+z,+x} + P_{+z,-x} = 1$.

Nyní uvažujme případ, kdy svazek ve stavu $|+z\rangle$ projde SG zařízaním ve směru osy x a dále necháme pokračovat jen svazek ve stavu $|+x\rangle$ a detekujeme opět v $|+z\rangle$. Pro amplitudu pravděpodobnosti dostaneme

$$A = \langle +z|+x\rangle \langle +x|+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \,, \tag{26}$$

čili pro pravděpodobnost $P_{+z,+x,+z} = 1/4$. Rozbor dalších příkladů najdete např. v knize doc. Zamastila.

(VIII) Spočtěte dále pravděpodobnosti $P_{-z,+x,-z}$, $P_{-z,-x,-z}$, $P_{-z,\pm x,-z}$, $P_{-z,\pm x,-z}$. Co o jednotlivých výsledcích a experimentech můžete říci?

Sternovy-Gerlachovy experimenty II: Projekce spinu 1/2 do libovolného směru

V minulém příkladu jsme se věnovali SG experimentům a počítali pravděpodobnosti naměření projekce spinu $\pm 1/2$ podél souřadnicových os. Samozřejmě však nejsme limitovaní jen na tyto tři směry - můžeme se ptát na projekci spinu do obecné směru.

Zopakujme si, že operátor spinu je vektorový operátor

$$\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) \tag{27}$$

a v bázi stavů $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$ ho můžeme vyjádřit

$$\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \,. \tag{28}$$

Poznamenejme, že tyto tři matice (bez toho faktoru 1/2) se nazývají Pauliho maticemi a standardně se značí σ_x, σ_y a σ_z.

Dále si připomeňme, že směr v prostoru je dán jednotkovým směrovým vektorem $\vec{n}$ ((I) zopakujte si sférické souřadnice)

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \,. \tag{29}$$

Jeho složky jsou dány

$$\begin{aligned} n_x &= \sin\theta \cos\varphi \\ n_y &= \sin\theta \sin\varphi \\ n_z &= \cos\theta \,. \end{aligned}$$

(II) Ukažte, že směrový vektor je opravdu jednotkový, tj. jeho norma (velikost) je jedna. Projekci spinu do libovolného směru pak získáme jako skalární součin vektorového operátoru spinu a směrového vektoru:

$$\hat{S}_n = \hat{\vec{S}} \cdot \vec{n} \,, \tag{30}$$

čili ((III) ukažte mezikroky)

$$\hat{S}_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{31}$$

Pravděpodobnost, s jakou naměříme projekci spinu $+1/2$ do libovolného směru, nacházel-li se systém na počátku ve stavu $|+z\rangle$, spočteme (viz minulé cvičení)

$$P_{+n} = |\langle +n|+z\rangle|^2 \tag{32}$$

a analogicky pro projekci $-1/2$. Potřebujeme tedy nalézt vlastní vektory operátor $\hat{S}_n$ náležící vlastním číslům $\pm 1/2$. (IV) Ověřte, že vlastní čísla operátoru $\hat{S}_n$ jsou $\pm 1/2$.

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = +1/2$ tedy máme:

$$\hat{S}_n |+n\rangle = \frac{1}{2} |+n\rangle \,, \tag{33}$$

čili

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \tag{34}$$

Tyto dvě rovnice, které jsou však na sobě závislé ((V) vyjádřete jednu z druhé), doplníme požadavkem normalizace

$$\langle +n|+n\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |x|^2 + |y|^2 = 1\,. \tag{35}$$

Z např. první rovnice si vyjadříme vztah mezi x a y

$$\cos\theta x + \sin\theta e^{-i\varphi} y = x \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sin\theta e^{-i\varphi}}{1-\cos\theta} . \tag{36}$$

Dosadíme do požadavku normalizace (35) ((VI) proveďte) a dostaneme normalizovaný vlastní vektor náležící vlastnímu číslu 1/2

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}\begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\varphi} \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\sqrt{(1+\cos\theta)/2} \\ \sqrt{(1-\cos\theta)/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} . \tag{37}$$

Pro pravděpodobnost, že naměříme projekci spinu $+1/2$ do libovolné směru, nacházel-li se systém na počátku ve stavu $|+z\rangle$, dostaneme

$$P_{+n} = |\langle +n|+z\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} e^{i\varphi}\cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) . \tag{38}$$

Jak můžeme (alespoň částečně) ověřit správnost našeho výpočtu? Např. $\theta = 0$ (fázi φ položíme rovnu nule) odpovídá projekci spinu 1/2 podél osy z, tj. měli bychom získat jednotkovou pravděpodobnost,

$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad P_{1/2} = \cos^2(0) = 1\,. \tag{39}$$

Komutátory I: Složky spinového operátoru

V kvantové teorie se denně setkáváme s tzv. **komutátory**. Komutátor dvou operátorů $\hat{A}$ a $\hat{B}$ je definován (tohle je opravdu nutné si pamatovat)

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\,. \tag{40}$$

(Povšimněme si analogie k Poissonovým závorkám, se kterými jsme se setkali v teoretické mechanice.) Co nám komutátor říká? Je potřeba si dávat pozor, jaké operátory můžeme prohodit (tj. jejich komutátor je nula) a jaké ne (tj. komutátor je nenulový). Má to nějaký fyzikální význam? Ano. Pokud spolu dva operátory nekomutují, nemůžeme odpovídající fyzikální veličiny naměřit současně.

Při přechodu od klasické ke kvantové mechanice používáme tzv. proceduru kanonického kvantování (o ní teprve uslyšíte). Při této proceduře všechny operátory ostříškujeme a zavedeme kanonickou komutační relaci

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\,. \tag{41}$$

Tento vztah nám říká, že stejné složky souřadnice a hybnosti spolu nekomutují. Čili, jak každý jistě už někde slyšel, polohu a hybnost nemůžeme naměřit současně s neomezenou přesností.

Podobně je tomu u jednotlivých složek operátoru spinu $\hat{\vec{S}}$. Složky spolu nekomutují; proto vždy měříme projekci spinu jen v jednom směru a toto měření zničí znalost o orientaci spinu v jiném směru získanou předchozím měřením. Tyto komutátory se teďko spočítáme. Pro komutátor x-ové a y-ové složky dostaneme

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\right] = \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \\
&= i\hat{S}_z\,.
\end{aligned} \tag{42}$$

Podobně pro zbylé dva komutátory dostaneme ((I) ověřte)

$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hat{S}_x \tag{43}$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hat{S}_y\,. \tag{44}$$

Tyto tři komutátory můžeme zapsat elegantně (tento vztah se hodí si pamatovat)

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k\,. \tag{45}$$

Zatímco jednotlivé složky spinového operátoru spolu nekomutují, komutuje každá s druhou mocninou spinového operátoru $\hat{S}^2$. Můžeme tedy naměřit součaně velikost spinu a jeho projekci do (právě) jednoho směru. Proto můžeme mluvit o částici se spinem 1/2 (tj. velikost spinu) a projekcemi $\pm 1/2$ do směru osy z. Druhá mocnina operátoru spinu je dána:

$$\hat{S}^2 = \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) \cdot (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2\,. \tag{46}$$

Pro výpočet komutátoru $[\hat{S}^2, \hat{S}_z]$ nám přijde vhod vědět, že (pamatujte si)

$$[\hat{A} \pm \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] \pm [\hat{B}, \hat{C}]\,, \tag{47}$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}\,. \tag{48}$$

(II) Dokažte tento vztah (48). Pro komutátor $[\hat{S}^2, \hat{S}_z]$ tak získáme

$$\begin{aligned}
[\hat{S}^2, \hat{S}_z] &= [\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2, \hat{S}_z] = \\
&= [\hat{S}_x^2, \hat{S}_z] + [\hat{S}_y^2, \hat{S}_z] + [\hat{S}_z^2, \hat{S}_z] = \\
&= \hat{S}_x[\hat{S}_x, \hat{S}_z] + [\hat{S}_x, \hat{S}_z]\hat{S}_x + \hat{S}_y[\hat{S}_y, \hat{S}_z] + [\hat{S}_y, \hat{S}_z]\hat{S}_y + \hat{S}_z[\hat{S}_z, \hat{S}_z] + [\hat{S}_z, \hat{S}_z]\hat{S}_z = \\
&= -i\hat{S}_x\hat{S}_y - i\hat{S}_y\hat{S}_x + i\hat{S}_y\hat{S}_x + i\hat{S}_x\hat{S}_y + 0 + 0 = \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

(III) Podobně spočteme komutátory pro zbývající složky $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_y$.

Povinné úlohy na příště

1. (1 b.) Vyjádřete operátor $\hat{S}_y$ a jeho vlastní stavy v bázi $\{|{+z}\rangle, |{-z}\rangle\}$.
2. (1 b.) Spočtěte pravděpodobnosti $P_{+z,-x,+z}$, $P_{+z,+x,-z}$, $P_{+z,\pm x,-z}$, $P_{+z,+x,+y}$. $\pm x$ znamená, že necháme projít oba svazky.

Bonusová úloha

Zopakujte výše popsaný postup (najděte vyjádření operátorů $\hat{S}_z$ a $\hat{S}_x$ a jejich vlastní stavy) pro částici se spinem $s = 1$. Zde máme tři možné projekce spinu: $s_z = -1, 0, 1$. Za bázi tedy zvolte tyto tři možné projekce podél osy z, tj. $|{+z}\rangle$, $|0z\rangle$ a $|{-z}\rangle$. Spočtěte pravděpodobnosti $P_{+z,0x}$, $P_{+z,+x}$, $P_{+z,-x}$, $P_{0z,+x}$, $P_{0z,0x}$, $P_{0z,-x}$, $P_{+z,+x,-z}$, $P_{+z,\pm x,-z}$, $P_{+z,(\pm,0)x,-z}$, $P_{+z,(\pm,0)x,+z}$.