Cvičení ÚDKM 3. 3. 2022 (3. cvičení)

Témata:

- skládání dvou spinů 1/2
- skládání momentů hybnosti $l = 1$ a $s = 1/2$
- direktní (tenzorový) součin, působení operátorů na složený stav

Skládání dvou spinů 1/2

Při prvním, hrubém, pohledu na spektrum nějakého atomu, řekněme vodíku pro jednoduchost, vidíme spektrální čáry dané přechody mezi hladiny s energií $1/2n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. (Jak odvodit tento výsledek - tj. vyřešit Schrödingerovu rovnici pro vodík - uvidíte později během semestru.) Mluvíme o tzv. hrubé struktuře. Při druhém, bližším, pohledu si však můžeme všimnout, že jednotlivé spektrální čáry jsou ve skutečnosti multiplety, tj. že energetické hladiny hrubé struktury jsou mírně rozštěpené. Jedná se o tzv. jemnou strukturu, která je způsobena interakcí orbitálního momentu hybnosti a spinu elektronu. A při ještě bližším pohledu můžeme pozorovat ještě další štěpení. Jedná se o tzv. hyperjemnou strukturu, ke které vede složení spinu jádra a spinu elektronu. Odborně o těchto interakcích spinů a orbitálních momentů hybnosti mluvíme jako o skládání momentů hybnosti a jedná se o velmi důležitou kapitolou v kvantové mechanice. My se zde - jelikož toto je pro mnohé vůbec první seznámení s kvantovým popisem světa - podíváme na ten nejjednodušší případ: skládání dvou spinů 1/2 (např. stavů dvou elektronů).

Nejprve uvažujme jednu částici se spinem $s = 1/2$ (např. jeden elektron). Z úvodních hodin víme, že spin 1/2 má dvě možné projekce $m_s = \pm 1/2$. Uvažujme búno projekce ve směru osy z a odpovídající stavy označíme $|s = 1/2, m_z = +1/2\rangle \equiv |\uparrow\rangle$ a $|s = 1/2, m_z = -1/2\rangle \equiv |\downarrow\rangle$. Matematicky řečeno, tyto dva stavy jsou vlastními stavy operátorů $\hat{S}^2$ a $\hat{S}_z$ s vlastními hodnotami $s = 1/2$ a $m_s = \pm 1/2$:

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = s(s+1) |s, m_s\rangle \ , \qquad \hat{S}_z |s, m_s\rangle = m_s |s, m_s\rangle \ , \tag{1}$$

tedy

$$\hat{S}^2 |\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|\uparrow\rangle \ , \qquad \hat{S}_z |\uparrow\rangle = +\frac{1}{2}|\uparrow\rangle \ , \tag{2}$$

$$\hat{S}^2 |\downarrow\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|\downarrow\rangle \ , \qquad \hat{S}_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle \ . \tag{3}$$

Nyní uvažujme systém skládájící se ze dvou částic se spinem 1/2. Každá z těchto části se může nacházet ve stavu $|\uparrow\rangle$ nebo $|\downarrow\rangle$, takže celý systém se může nacházet v jednom ze čtyř stavů (resp. jejich lineárních kombinacích):

$$|\uparrow\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \ , \tag{4}$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \ , \tag{5}$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \ , \tag{6}$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \ . \tag{7}$$

Pro popis celkového stavu je tedy výhodné zavést operátor celkové spinu jako součet jednočásticových operátorů spinu

$$\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2 = \tag{8}$$

$$= \hat{\vec{S}}_1 \otimes \hat{1}_2 + \hat{1}_1 \otimes \hat{\vec{S}}_2 \,. \tag{9}$$

Každý z těchto jednočásticových operátorů spinu však působí jen v daném prostoru stavů, tj. $\hat{\vec{S}}_1$ působí jen na stav první částice a $\hat{\vec{S}}_2$ jen na stav té druhé. Matematicky správně (druhý řádek) se to vyjádří pomocí tenzorového součinu a jednotkového operátoru (jednotkový operátor nechá daný stav tak, jak je). Tenzorový součin $\hat{\vec{S}}_1 \otimes \hat{1}_2$ tedy znamená, že na první částici působí operátor $\hat{\vec{S}}_1$ a na druhou jednotkový operátor $\hat{1}_2$ a podobně pro druhý člen. V praxi se však často používá (i když poněkud matematicky nepřesný) zápis bez jednotkových operátorů (první řádek).

Pro operátor $\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} \otimes \hat{1}_2 + \hat{1}_1 \otimes \hat{S}_{2z}$ tedy dostaneme:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_z \left|\uparrow\uparrow\right\rangle &= \hat{S}_{1z} \left|\uparrow\right\rangle_1 \otimes \hat{1}_2 \left|\uparrow\right\rangle_2 + \hat{1}_1 \left|\uparrow\right\rangle_1 \otimes \hat{S}_{2z} \left|\uparrow\right\rangle_2 = && (10)\\
&= \frac{1}{2} \left|\uparrow\right\rangle_1 \otimes \left|\uparrow\right\rangle_2 + \left|\uparrow\right\rangle_1 \otimes \frac{1}{2} \left|\uparrow\right\rangle_2 = && (11)\\
&= 1 \left|\uparrow\right\rangle_1 \otimes \left|\uparrow\right\rangle_2 = 1 \left|\uparrow\uparrow\right\rangle \,. && (12)
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že stav $\left|\uparrow\uparrow\right\rangle \equiv \left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\uparrow\right\rangle_2$ je vlastním stavem operátoru $\hat{S}_z$ s vlastním číslem 1. (I) Proveďte podobný výpočet pro zbylé tři stavy (5) - (7). Mělo by vám vyjít

$$\begin{aligned}
\hat{S}_z \left|\uparrow\downarrow\right\rangle &= 0 \left|\uparrow\downarrow\right\rangle \,, && (13)\\
\hat{S}_z \left|\downarrow\uparrow\right\rangle &= 0 \left|\downarrow\uparrow\right\rangle \,, && (14)\\
\hat{S}_z \left|\downarrow\downarrow\right\rangle &= -1 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle \,. && (15)
\end{aligned}$$

Při zavádění operátoru celkového spinu $\hat{S}^2$ musíme být o něco opatrnější

$$\hat{S}^2 = \left(\hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2\right)^2 = \hat{S}_1^2 + 2\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 + \hat{S}_2^2 \,, \tag{16}$$

kde jsme pro jednoduchost vypustili jednotkové operátory. Působení operátorů $\hat{S}_1^2$ a $\hat{S}_2^2$ na stavy $\left|\uparrow\right\rangle$ a $\left|\downarrow\right\rangle$ známe. Nevíme však, jak působí $\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2$. Pro součin dvou vektorových operátorů $\hat{\vec{A}}$ a $\hat{\vec{B}}$ obecně platí

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{B}} &= \hat{A}_1\hat{B}_1 + \hat{A}_2\hat{B}_2 + \hat{A}_3\hat{B}_3 && (17)\\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{A}_+\hat{B}_- + \hat{A}_-\hat{B}_+\right) + \hat{A}_3\hat{B}_3 \,, && (18)
\end{aligned}$$

kde $\hat{A}_\pm = \hat{A}_1 \pm i\hat{A}_2$ a podobně pro $\hat{\vec{B}}$. (II) Dokažte tuto rovnost (dosazením).
Získáme tedy

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \left(\hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}\right) + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} \,, \tag{19}$$

kde $\hat{S}_\pm$ jsou zvyšovací/snižovací operátory známé z prvního cvičení (Sternovy-Gerlachovy experimenty). Operátor $\hat{S}^2$ tedy působí na stav (4):

$$\begin{aligned}
\hat{S}^2 \left|\uparrow\uparrow\right\rangle = {} & \hat{S}_1^2 \left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\uparrow\right\rangle_2 + \left|\uparrow\right\rangle_1 \hat{S}_2^2 \left|\uparrow\right\rangle_2 \\
& + \left(\hat{S}_{1+} \left|\uparrow\right\rangle_1 \hat{S}_{2-} \left|\uparrow\right\rangle_2 + \hat{S}_{1-} \left|\uparrow\right\rangle_1 \hat{S}_{2+} \left|\uparrow\right\rangle_2\right) \\
& + 2\hat{S}_{1z} \left|\uparrow\right\rangle_1 \hat{S}_{2z} \left|\uparrow\right\rangle_2 = \\
= {} & \frac{3}{4} \left|\uparrow\right\rangle_1 \left|\uparrow\right\rangle_2 + \left|\uparrow\right\rangle_1 \frac{3}{4} \left|\uparrow\right\rangle_2 + (0+0) + 2 \cdot \frac{1}{2} \left|\uparrow\right\rangle_1 \frac{1}{2} \left|\uparrow\right\rangle_2 = \\
= {} & 2 \left|\uparrow\uparrow\right\rangle \,. && (20)
\end{aligned}$$

Stav $\left|\uparrow\uparrow\right\rangle$ je tedy vlastním stavem operátoru $\hat{S}^2$ s vlastním číslem $S = 1$ (protože $S(S+1) = 1(1+1) = 2$). (III) Spočtěte, jak působí operátor $\hat{S}^2$ na zbylé stavy (5) - (7). Mělo by vyjít

$$\begin{aligned}
\hat{S}^2 \left|\uparrow\downarrow\right\rangle &= \left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle \,, && (21)\\
\hat{S}^2 \left|\downarrow\uparrow\right\rangle &= \left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle \,, && (22)\\
\hat{S}^2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle &= 2 \left|\downarrow\downarrow\right\rangle \,. && (23)
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že stavy $\left|\uparrow\uparrow\right\rangle$ a $\left|\downarrow\downarrow\right\rangle$ jsou vlastními stavy $\hat{S}^2$, ale stavy $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$ a $\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$ nikoliv. Jejich vhodné lineární kombinace

$$\begin{aligned}
\hat{S}^2 \left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) &= 2 \left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) \,, && (24)\\
\hat{S}^2 \left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) &= 0 \left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) && (25)
\end{aligned}$$

však jsou vlastními stavy $\hat{S}^2$ s vlastními čísly 1 a 0.

Shrňme tedy naše výpočty. Ze dvou sad stavů pro spin 1/2, tj. $\left|\uparrow\right\rangle$, $\left|\downarrow\right\rangle$, můžeme vytvořit celkem čtyři různé celkové stavy. Tři z nich odpovídají systému se spinem $S = 1$ a třemi projekcemi $M_S = -1, 0, +1$ (jak tomu má být)

$$|1,+1\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 = \left|\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 , \tag{26}$$
$$|1,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 + \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\right\rangle_2\right) , \tag{27}$$
$$|1,-1\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 = \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 \tag{28}$$

a jeden z nich odpovídá systému se spinem $S = 0$ a projekcí $M_S = 0$ (jak má být)

$$|0,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 - \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\right\rangle_2\right) . \tag{29}$$

(IV) Proveďte výpočet pro skládání dvou spinů 1/2 podle návodu popsaného v knize doc. Zamastila. Tj. použijte rovnici

$$\begin{aligned} 0 =& [j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) - j(j+1) + 2i(m-i)]c_i + \\ &+ \alpha_+(j_1, i-1)\alpha_-(j_2, m-i+1)c_{i-1} + \\ &+ \alpha_-(j_1, i+1)\alpha_+(j_2, m-i-1)c_{i+1} , \end{aligned} \tag{30}$$

kde

$$\alpha_\pm(j,m) = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} , \tag{31}$$

a normalizační podmínku $\sum_i |c_i|^2 = 1$. Získáte soustavu rovnic pro koeficienty c_i a jejím řešením c_i. Vidíte souvislost tohoto obecného postupu podle "receptu" s "intuitivním" postupem výše?

Na závěr si spočítáme jeden příklad. Uvažujme, že jedna částice se spinem 1/2 se nachází ve stavu $\left|s_z = +\tfrac{1}{2}\right\rangle$ (projekce spinu podél osy z +1/2) a druhá částice se spinem 1/2 ve stavu $\left|s_x = +\tfrac{1}{2}\right\rangle$ (projekce spinu podél osy x +1/2). Naším úkolem je spočítat, s jakou pravděpodobností získáme celkový stav se spinem $S = 0$ (a tedy $M_S = 0$).

Jak jsme si výše ukázali, dvě částice se spinem 1/2 se složí na trojnásobně degenerovaný stav s velikostí spinu $S = 1$ a jeden stav se spinem $S = 0$. Stav se spinem $S = 0$ odpovídá

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2\right) , \tag{32}$$

(značení $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ jako výše pro projekce podél osy z). Drobný háček je v tom, že stav druhé částice není vyjádřen ve vlastních stavech operátoru $\hat{S}_z$. (V) Vyjádřete stav druhé částice $\left|s_x = +\tfrac{1}{2}\right\rangle$ v bázi stavů $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$. (Nápověda: napište operátor $\hat{S}_x$ v bázi $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ a poté ho diagonalizujte). Mělo by vyjít

$$\left|s_x = +\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) . \tag{33}$$

Náš systém se tedy nachází ve stavu

$$\left|s_z^A = +\tfrac{1}{2}, s_x^B = +\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right) . \tag{34}$$

Amplitudu hledané pravdepodobnosti pak získáme

$$\left\langle 0,0 \middle| s_z^A = +\tfrac{1}{2}, s_x^B = +\tfrac{1}{2}\right\rangle = ... = \frac{1}{2} .$$

Pravděpodobnost je pak

$$\left|\left\langle 0,0 \middle| s_z^A = +\tfrac{1}{2}, s_x^B = +\tfrac{1}{2}\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{4} . \tag{35}$$

(VI) Proveďte výpočty vedoucí k posledním dvěma rovnicím.

Elektron v p-stavu (skládání $s = 1/2$ a $l = 1$)

V druhé části dnešního cvičení se podíváme na skládání momentů hybnosti $l = 1$ a $s = 1/2$, což odpovídá interakci spinu elektronu v p-orbitalu s jeho orbitálním momentem hybnosti (jak bylo zmíněno na začátku, to vede na tzv. jemnou strukturu). Půjdeme na to však trochu jinak, než v části první.

(VII) Jaké jsou možné kombinace stavů $|l, m_l\rangle$ a $|s, m_s\rangle$? Celkem máme 6 možných kombinací, tj. učeně řečeno dimenze Hilbertova prostoru je $d = (2l + 1)(2s + 1) = 6$.

Obecně dva momenty hybnosti, označme je třeba l a s, složíme na celkový moment hybnosti $j = |l - s|, |l - s| + 1, \ldots, l + s$ s $(2j+1)$ možnými projekcemi $m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$. V našem případě tedy získáme 4 stavy s $j = 3/2$ ($m_{j=3/2} = -3/2, -1/2, +1/2, +3/2$) a dva stavy s $j = 1/2$ ($m_{j=1/2} = -1/2, +1/2$). Celkem tedy máme opět 6 možných kombinací.

Jak zjistíme, jaké stavy původní báze (resp. jejich lineární kombinace) $|l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$, tj. $\{|1, +1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\} \otimes \{|1/2, +1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle\}$, odpovídají stavům nové (složené) báze $\{|j, m_j\rangle\}$? Stavy naší "staré" báze jsou vlastními stavy operátorů $\hat{L}^2$ a $\hat{L}_z$, resp. $\hat{S}^2$ a $\hat{S}_z$. Stavy naší "nové" báze jsou vlastními stavy operátoru celkového momentu hybnosti $\hat{J}^2$ a $\hat{J}_z$, který je definován

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}\,. \tag{36}$$

(VIII) Připomeňte si, jak působí tyto zmíněné operátory na své vlastní stavy, tj. jaké vlastní hodnoty nám dávají.

Mohli bychom, podobně jako v první části, spočítat působení operátorů $\hat{J}^2$ a $\hat{J}_z$ na jednotlivé stavy staré báze a pak hledat vhodné lineární kombinace těchto stavů tak, aby byly vlastními stavy operátorů $\hat{J}^2$ a $\hat{J}_z$. (IX) Proveďte takový výpočet.

Alternativně můžeme najít vyjádření nějakého jednoho stavu $|j, m_j\rangle$ pomocí $|l, m_l\rangle |s, m_s\rangle$ a pak použít zvyšovací a snižovací operátory $\hat{J}_\pm$ a vygenerovat zbylé stavy. Nejjednodušší je si vybrat jeden z krajních stavů - ten s nejvyšší nebo nejnižší projekcí m_j, protože takový stav můžeme získat jen jednou kombinací stavů $|l, m_l\rangle |s, m_s\rangle$. Platí totiž $m_j = m_l + m_s$. To vidíme z rozepsání operátoru $\hat{J}_z$:

$$\hat{J}_z = \hat{L}_z \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{S}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z\,. \tag{37}$$

V našem případě je nejvyšším možným stavem stav $|j = 3/2, m_j = +3/2\rangle$, který zjevně získáme kombinací

$$|j = 3/2, m_j = +3/2\rangle = |l = 1, m_l = +1\rangle \otimes |s = 1/2, m_s = +1/2\rangle \equiv |l = 1, m_l = +1\rangle\, |s = 1/2, m_s = +1/2\rangle\,. \tag{38}$$

Působením operátoru $\hat{J}_-$ na tento stav - připomeňme si, že platí

$$\hat{J}_\pm |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle\,, \tag{39}$$

pak dostaneme stav $|j = 3/2, m_j = +1/2\rangle$. Jednak platí

$$\hat{J}_- |3/2, +3/2\rangle = \sqrt{3}\, |3/2, +1/2\rangle \tag{40}$$

a jednak platí (pro názornost zde píšeme $\otimes$)

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |3/2, +3/2\rangle &= \left(\hat{L}_- \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{S}_-\right) |1, +1\rangle \otimes |1/2, +1/2\rangle = \\ &= \hat{L}_- |1, +1\rangle \otimes \hat{1}\, |1/2, +1/2\rangle + \hat{1}\, |1, +1\rangle \otimes \hat{S}_- |1/2, +1/2\rangle = \\ &= \sqrt{2}\, |1, 0\rangle \otimes |1/2, +1/2\rangle + |1, 1\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Odtud dostaneme

$$|3/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, |1, 0\rangle\, |1/2, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, |1, 1\rangle\, |1/2, -1/2\rangle\,. \tag{42}$$

Opakovaným působením $\hat{J}_-$ dostaneme další dva stavy $|j = 3/2, m_j = -1/2\rangle$ a $|j = 3/2, m_j = -3/2\rangle$:

$$|3/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\, |1, -1\rangle\, |1/2, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\, |1, 0\rangle\, |1/2, -1/2\rangle\,, \tag{43}$$

$$|3/2, -3/2\rangle = |1, -1\rangle\, |1/2, -1/2\rangle\,. \tag{44}$$

(X) Spočtěte.

Jak získáme chybějící dva stavy $|j = 1/2, m_j = +1/2\rangle$ a $|j = 1/2, m_j = -1/2\rangle$? Projekci celkového momentu hybnosti $m_j = +1/2$ získáme jako součet $m_l + m_s$, tj. jako lineární kombinaci stavů s $m_l = 0$ a $m_s = +1/2$ a $m_l = +$ a $m_s = -1/2$. Jednotlivé stavy $|j, m_j\rangle$ na sebe musí být kolmé, takže chybějící stavy $|j = 1/2, m_j = +1/2\rangle$ a $|j = 1/2, m_j = -1/2\rangle$ získáme z podmínky orthogonality k $|j = 3/2, m_j = +1/2\rangle$, resp. $|j = 3/2, m_j = -1/2\rangle$:

$$|1/2, +1/2\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}\, |1, 0\rangle\, |1/2, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\, |1, +1\rangle\, |1/2, -1/2\rangle\,, \tag{45}$$

$$|1/2, -1/2\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\, |1, -1\rangle\, |1/2, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, |1, 0\rangle\, |1/2, -1/2\rangle\,. \tag{46}$$

(XI) Spočtěte.

Skládání momentů hybnost - obecná poznámka

Označme J obecně výsledný moment hybnosti, M_J jeho projekci, j_i jednotlivé momenty hybnosti, které skládáme, a m_{j_i} je jejich projekce. Obecně při skládání dvou momentů hybnosti hledáme koeficienty rozvoje celkových stavů $|J, M_J\rangle$ do báze stavů $|j_1, m_{j_1}\rangle\, |j_2, m_{j_2}\rangle$,

$$|J, M_J\rangle = \sum_i c_i\, |j_1, i\rangle\, |j_2, M_J - i\rangle\ . \tag{47}$$

Tyto koeficienty se nazývají Clebschovy-Gordonovy a existuje pro ně obecný předpis, jak je spočítat. Více se o nich dočtete v knize doc. Zamastila, kap. 4.2 Skládání momentů hybnosti. Tam je také ukázano (uvidíte na přednášce příští semestr), že obecně J nabývá hodnot $|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, ..., j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$ a že složením dvou stavů s projekcemi m_{j1} a m_{j2} získáme celkový stav s projekcí momentu hybnosti $M_J = m_{j1} + m_{j2}$.

Povinné úlohy na příště

1. (1 b.) Uvažujme, že jedna částice se spinem 1/2 se nachází ve stavu $\left|s_z = +\frac{1}{2}\right\rangle$ (projekce spinu podél osy z $+1/2$) a druhá částice se spinem 1/2 ve stavu $\left|s_y = +\frac{1}{2}\right\rangle$ (projekce spinu podél osy y $+1/2$). S jakou pravděpodobností získáme celkový stav $|1, 0\rangle$, tj. se spinem $S = 1$ a projekcí spinu $M_S = 0$? A co stavy $|1, +1\rangle$ a $|1, -1\rangle$?
   Nápověda: stav $\left|s_y = +\frac{1}{2}\right\rangle$ si vyjádřete v bázi stavů $\left|s_z = \pm\frac{1}{2}\right\rangle$.

2. (1 b.) Vyjádřete operátor $\hat{J}^2$ pomocí operátorů $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{L}_\pm$, $\hat{S}^2$, $\hat{S}_z$, $\hat{S}_\pm$. Spočítejte komutátor $\left[\hat{J}^2, \hat{J}_z\right]$.
   (Připomeňme si, že $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k$ a $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$.)

Bonusová úloha

Uvažujme orbitální moment hybnosti elektronu v d-stavu, tj. $l = 2$, a spin elektronu, tj. $s = 1/2$, proveďte podobný výpočet jako výše.

Tyto dva momenty hybnosti složíme na celkový moment hybnosti j.
Kolik (a jakých) stavů máme pro $l = 2$ a pro $s = 1/2$?
Jaké jsou možné kombinace těchto stavů?
Kolik tedy získáme celkových stavů?
Jakých hodnot může j nabývat (a jaké jsou odpovídající m_j)?
Vyjádřete stavy $|j, m_j\rangle$ pomocí stavů $|l, m_l\rangle\, |s, m_s\rangle$.